ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**VŨ THỊ THU HÀ**

# BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2015**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**VŨ THỊ THU HÀ**

# BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

**CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG**
**MÃ SỐ: 60 46 01 12**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
**TS.NCVC. NGUYỄN VĂN NGỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2015**

# Mục lục

# Mở đầu

Cùng với các biến đổi tích phân khác, như biến đổi Fourier, biến đổi Hankel, biến đổi Mellin, v.v..., biến đổi Laplace là một trong những biến đổi tích phân quan trọng của Giải tích toán học và là công cụ hữu hiệu giải nhiều bài toán của các phương trình vi phân, phương trình tích phân, v.v...

Vì thế, tìm hiểu và học tập về biến đổi Laplace là việc cần thiết. Tôi đã chọn đề tài "*Biến đổi Laplace và một số ứng dụng*" làm đề tài luận văn với mong muốn được học tập và tìm hiểu sâu hơn về lĩnh vực này.

Đã có một số luận văn và khóa luận về đề tài này, chẳng hạn các tài liệu từ 1)-3) trong [4]. Tuy nhiên, còn nhiều vấn đề quan trọng và hay về lý thuyết cũng như ứng dụng của biến đổi Laplace mà các tài liệu trước đây chưa đề cập, đó là: Định lý Tauberian và Bổ đề Watson, các phương pháp tìm biến đổi Laplace ngược, phương trình sai phân và vi phân có chậm, áp dụng biên đổi Laplace tìm tổng của chuỗi và tính các tích phân suy rộng, phương trình tích phân Abel, v.v...

Mục đích của luận văn này là trình bày cơ sở lý thuyết của biến đổi Laplace và một số ứng dụng trong phương trình vi phân, phương trình tích phân và một số vấn đề liên quan khác.

**Luận văn có bố cục:** Mở đầu, ba chương, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

**Chương 1** trình bày cơ sở lý thuyết của biến đổi Laplace, trong đó đi sâu về biến đổi Laplace ngược, Định lý Tauberian và Bổ đề Watson. Đặc biệt, đã đưa ra nhiều ví dụ có độ khó khác nhau về tìm biến đổi Laplace và biến đổi Laplace ngược.

**Chương 2** trình bày những ứng dụng của biến đổi Laplace trong phương trình vi phân thường, phương trình sai phân và phương trình vi phân có chậm, phương trình đạo hàm riêng. Đã chọn lựa nhiều ví dụ áp dụng có nguồn gốc từ Cơ học và Vật lý, như đao động cơ điều hòa, dao động điện điều hòa, truyền nhiệt, v.v...

**Chương 3** trình bày một số ứng dụng của biến đổi Laplace trong các bài toán về tìm tổng của chuỗi vô hạn, tính toán và đánh giá các tích phân, giải các phương trình tích phân Volterra dạng chập, đặc biệt là phương trình tích

phân Abel trên nửa trục.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của Thầy-Tiến sỹ, NCVC Nguyễn Văn Ngọc, Trường Đại học Thăng Long. Chính Thầy đã giúp em có thêm động lực để học tập, nghiên cứu và hoàn thiện khóa luận này.

Bên cạnh đó, em cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Quý Thầy cô đã trực tiếp giảng dạy lớp K7Y của chúng em, Ban Giám Hiệu, Phòng đào tạo, Khoa Toán-Trường Đại học khoa học-Đại học Thái Nguyên đã nhiệt tình giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập tại Trường, cũng như quá trình làm luận văn sau này.

Thật là thiếu sót nếu em không nhắc đến sự quan tâm, giúp đỡ của mỗi thành viên trong lớp K7Y của em; các Thầy cô trong BGH, đồng nghiệp, Tổ Toán trong Hội đồng Giáo dục Nhà Trường THPT Hưng Yên, nơi em đang công tác.

Và còn nữa, tinh thần ủng hộ, sự quan tâm, động viên, khích lệ, tạo điều kiện hết lòng của gia đình đã giúp em hoàn thành khóa luận này.

Em xin được bày tỏ lòng tri ân sâu sắc nhất tới tất cả mọi người.
Về bản thân, em sẽ cố gắng không ngừng việc trau dồi và cầu thị để khóa luận thêm hoàn thiện khi được đón nhận sự quan tâm, góp ý của các Quý Thầy cô và bạn bè đồng nghiệp.

Em xin trân trọng cảm ơn.

**Thái Nguyên, tháng 11 năm 2015**
**Học viên**

**Vũ Thị Thu Hà**

# Chương 1

# Định nghĩa biến đổi Laplace và các tính chất cơ bản

Trong chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm về biến đổi Laplace, như biến đổi Laplace thuận và Laplace ngược, các tính chất cơ bản của biến đổi Laplace, đặc biệt là dịch chuyển và tích chập. Ngoài phần lý thuyết, chương này còn đưa ra nhiều ví dụ minh họa. Nội dung của chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [5], [6].

## 1.1 Định nghĩa hình thức của biến đổi Laplace và các ví dụ

### 1.1.1 Định nghĩa hình thức

Biến đổi Laplace của $f(t)$ một cách hình thức được định nghĩa bởi công thức:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \ \mathrm{Re}s > 0. \tag{1.1}$$

Ở đây $e^{-st}$ là hạt nhân của biến đổi và s là biến số của biến đổi và là một số phức. Dưới điều kiện khá rộng rãi về $f(t)$, biến đổi Laplace của nó $\overline{f}(s)$ là hàm giải tích theo s trong nửa mặt phẳng, ở đó Re $> a$, ở đây $a$ là một hằng số thực dương.

Sử dụng công thức (1.1), chúng ta có thể tính toán các biến đổi Laplace của một số hàm cấp thấp đơn giản.

### 1.1.2 Các ví dụ

**Ví dụ 1.1.** Nếu $f(t) = e^{at}$, trong đó a là một hằng số thực thì

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \ \mathrm{Re}s > a. \tag{1.2}$$

**Ví dụ 1.2.** Nếu $f(t) = \sin at$, trong đó $a$ là hằng số thực thì

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty [e^{-t(s-ia)} - e^{-t(s+ia)}]dt \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right] = \frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Tương tự, ta có:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}. \tag{1.4}$$

**Ví dụ 1.3.** Nếu $f(t) = \sinh at$ hoặc $\cosh at$, trong đó $a$ là hằng số thực thì

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sinh at dt = \frac{a}{s^2-a^2}. \tag{1.5}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cosh at dt = \frac{s}{s^2-a^2}. \tag{1.6}$$

**Ví dụ 1.4.** Nếu $f(t) = t^n$, trong đó $n$ là một số nguyên dương thì

$$f(s) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{1.7}$$

Trở lại công thức (1.2) với $a = 0$, lấy đạo hàm theo s hai vế, một cách hình thức, ta có:

$$\int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}. \tag{1.8}$$

Điều đó có nghĩa là

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}. \tag{1.9}$$

Đạo hàm theo $s$ hai vế của (1.8) ta được:

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^\infty t^2e^{-st}dt = \frac{2}{s^3}. \tag{1.10}$$

Tương tự như vậy, với $a = 0$, lấy đạo hàm theo $s$ hai vế của (1.2) $n$ lần, ta được công thức:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty t^ne^{-st}dt = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{1.11}$$

**Ví dụ 1.5.** Nếu $a > -1$ và là một số thực thì

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, (s > 0). \tag{1.12}$$

Chúng ta có

$$\mathcal{L}\{t^a\} = \int_0^\infty t^a e^{-st} dt.$$

Lúc này, đặt $st = x$, thì

$$= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}.$$

Ở đây $\Gamma(a)$ là hàm Gamma được định nghĩa bởi tích phân

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \ \ a > 0. \tag{1.13}$$

Hàm Gamma có tính chất:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{1.14}$$

Rõ ràng, kết quả (1.12) là một phần mở rộng của (1.11). Sau đó là một trường hợp đặc biệt của trước đây khi $a$ là một số nguyên dương.

Đặc biệt khi $a = -\frac{1}{2}$, kết quả của (1.12) cho:

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, khi \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{1.15}$$

Tương tự,

$$\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{s^{3/2}}, \tag{1.16}$$

ở đây:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## 1.2 Điều kiện tồn tại của biến đổi Laplace

Một hàm $f(t)$ được gọi là hàm cấp mũ $a > 0$ trên $(0 \leq t < \infty)$, nếu tồn tại một hằng số dương $K$, sao cho $t > T$,

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \tag{1.17}$$

và chúng ta viết điều này một cách tượng trưng như sau:

$$f(t) = O(e^{at}), \text{ khi } \ t \to \infty. \tag{1.18}$$

Hay tương đương:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-bt}|f(t)| \leq K \lim_{t\to\infty} e^{-(b-a)t} = 0, b > a. \tag{1.19}$$

Đơn giản hơn, hàm $f(t)$ được gọi cấp mũ khi t $\to \infty$ nếu nó không tăng nhanh hơn $Ke^{at}$ khi $t \to \infty$.

**Định lý 1.1.** Nếu một hàm $f(t)$ liên tục hoặc liên tục từng khúc trên mỗi khoảng thời gian xác định $(0;T)$ và là hàm cấp mũ $e^{at}$, thì biến đổi Laplace của $f(t)$ tồn tại với mọi $s$, theo điều kiện phần thực Re$s > a$.

*Chứng minh.* Chúng ta có

$$\begin{aligned} \left|\overline{f}(s)\right| &= \left|\int_0^\infty e^{-ct} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-ct}|f(t)|dt \\ &\leq K\int_0^\infty e^{-t(c-a)}dt = \frac{K}{c-a}, \quad c = Res > a. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Chứng minh đã hoàn thành.

Lưu ý rằng điều kiện nêu trong Định lý 1.1 chỉ là một điều kiện đủ mà không phải là điều kiện cần.

Cũng theo (1.20), thì

$$\lim_{s\to\infty} |\overline{f}(s)| = 0. \Rightarrow \lim_{s\to\infty} \overline{f}(s) = 0.$$

Kết quả này được xem như là tính chất về giới hạn của biến đổi Laplace.

Tuy nhiên $\overline{f}(s) = s$ hoặc $s^2$ không là biến đổi Laplace của bất kì hàm liên tục (hay hàm liên tục từng phần) nào, bởi vì $\overline{f}(s)$ không tiến tới 0 khi s $\to \infty$. Hơn nữa, một hàm $f(t) = at^2, \quad a > 0$ không thể có một biến đổi Laplace mặc dù nó là hàm liên tục nhưng không là cấp mũ. □

## 1.3 Các tính chất đơn giản của biến đổi Laplace

### 1. Tính chất về dịch chuyển

**Định lý 1.2.** (Định lý thứ nhất về chuyển dịch Heaviside).
Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ thì

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \overline{f}(s+a), \text{trong đó a là một hằng số thực.} \tag{1.21}$$

*Chứng minh.* Theo định nghĩa, chúng ta có

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)dt = \overline{f}(s+a).$$

□